PROBLEMAS PARA EL EXAMEN FINAL DE CALCULO DIFERENCIAL

PROBLEMA 1

Calcular: $\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x\,ctgx-1}$

Resolución:

El límite se puede expresar en la forma:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cos x}{x\cos x - \operatorname{sen} x}$$

Aplicando la Regla de L'Hospital:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + (\operatorname{sen} x)^2 - (\cos x)^2}{-x \operatorname{sen} x}$$

Aplicando por segunda vez la Regla de L'Hospital:

$$L = -\lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x + 4\operatorname{sen} x \cos x}{x\cos x + \operatorname{sen} x}$$

Aplicando por tercera vez la Regla de L'Hospital:

$$L = -\lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 4[-(\operatorname{sen} x)^2 + (\cos x)^2]}{-x\operatorname{sen} x + \cos x + \cos x}$$

$$L = -\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

PROBLEMA 2

Dada la función $f(x) = ln(2\,cosx)$

a) Determinar el polinomio de Taylor de grado 3 centrado en $x_0 = \pi/3$.

Resolución:

$$P_3(x) = f(\pi/3) + \frac{f'(\pi/3)}{1!}(x-\pi/3)^1 + \frac{f''(\pi/3)}{2!}(x-\pi/3)^2 + \frac{f'''(\pi/3)}{3!}(x-\pi/3)^3$$

Derivando y evaluando en $x_0 = \pi/3$

$f(x) \;=\; ln(2\,cosx) \quad\rightarrow\quad f(\pi/3) = 0$

$f'(x) \;=\; -\,tagx \quad\rightarrow\quad f'(\pi/3) = -\sqrt{3}$

$f''(x) \;=\; -sec^2x \quad\rightarrow\quad f''(\pi/3) = -4$

$f'''(x) \;=\; -2sec^2x\,tagx \quad\rightarrow\quad f''(\pi/3) = -8\sqrt{3}$

Reemplazando en el polinomio:

$$P_3(x) = -\sqrt{3}(x-\pi/3) - 2(x-\pi/3)^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}(x-\pi/3)^3$$

PROBLEMA 3

Use el teorema de Taylor para:

a) Obtener los 4 primeros términos del polinomio de Maclaurin para la función $f(x) = sen\,x + cosx$.

Resolución:

Evaluando las funciones y sus derivadas en $x = 0$:

$f(x) = e^x \rightarrow f(0) = 1;\quad g(x) = \cos x \rightarrow g(0) = 1;\quad h(x) = sen\,x \rightarrow h(0) = 0$

$f'(x) = e^x \rightarrow f'(0) = 1;\quad g'(x) = -sen\,x \rightarrow g'(0) = 0;\quad h'(x) = cos\,x \rightarrow h'(0) = 1$

$f''(x) = e^x \rightarrow f''(0) = 1;\ g''(x) = -\cos x \rightarrow g''(0) = -1;\ h''(x) = -senx \rightarrow h''(0) = 0$

$f'''(x) = e^x \rightarrow f'''(0) = 1;\ g'''(x) = senx \rightarrow g'''(0) = 0;\ h'''(x) = -cosx \rightarrow h'''(0) = -1$

… … …

$f^{(n)}(x) = e^x \rightarrow f^{(n)}(0) = 1;\ g(x) = \cos x \rightarrow g(0) = 1;\ h(x) = sen\,x \rightarrow h(0) = 0$

Usando el teorema de Taylor para funciones infinitamente diferenciables:

$$f(x) = \frac{f(0)x^0}{0!} + \frac{f'(0)x^1}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots + \frac{x^{2n}}{2n!} - \cdots$$

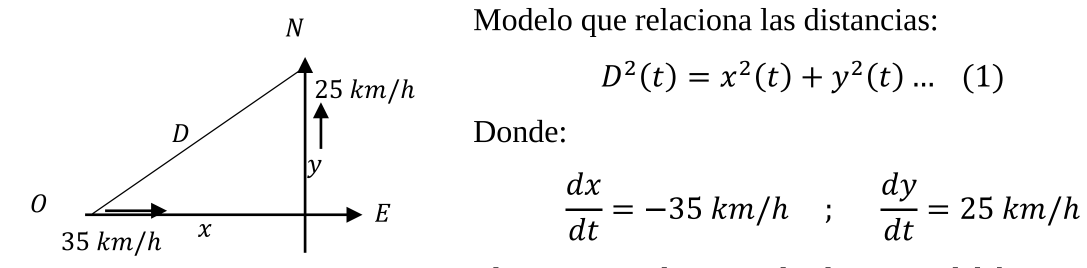
$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1!} - \cdots$$

Rpta: A) M(x)= $1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}$

PROBLEMA 4

A mediodía, un barco A está a 150 km al oeste de un barco B. El barco A navega hacia el este $35\ km/h$ y el barco B navega hacia el norte a $25\ km/h$ ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre los barcos a las 4:00 PM?

Resolución:



Modelo que relaciona las distancias:

$$D^2(t) = x^2(t) + y^2(t) \ldots \quad (1)$$

Donde:

$$\frac{dx}{dt} = -35\ km/h \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = 25\ km/h$$

El signo – indica que la distancia del barco A a punto de referencia está disminuyendo.

Derivando en forma implícita para obtener qué tan rápido cambia la distancia entre los barcos:

$$D\frac{dD}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dD}{dt} = \frac{x}{D}\frac{dx}{dt} + \frac{y}{D}\frac{dy}{dt}$$

Considerando el tiempo: $Inicio = mediodía$: $t = 0$

4:00 p.m $\quad t = 4$

Como la velocidad es constante, a las 4:00 PM el barco A ha recorrido 140 km. y está a $10\ km$ del punto de referencia desde donde se miden las distancias; el barco B a 100 km y la distancia entre ellos: $D = \sqrt{10^2 + 100^2} = 10\sqrt{101}$

Sustituyendo estos valores en:

$$\frac{dD}{dt} = \frac{10}{10\sqrt{101}}(-35) + \frac{100}{10\sqrt{101}}(25) \cong 21{,}5$$

A las 4:00 p.m, la distancia entre los barcos está aumentando a una razón aproximada de $21{,}5\ km/h$

PROBLEMA 5

Considerando la curva plana

$$C: \begin{cases} x = \dfrac{|t|}{1+|t|} \\[2ex] y = \dfrac{t|t|}{(1+|t|)^2} \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

Elimine el parámetro y obtenga la ecuación cartesiana y la variación de x.

Resolución:

a) Eliminación del parámetro

Siendo $y = \dfrac{t|t|}{(1+|t|)^2}$ entonces $|y| = \dfrac{|t|^2}{(1+|t|)^2} = \left(\dfrac{|t|}{1+|t|}\right)^2 = x^2$

$\rightarrow \quad |y| = x^2$

Además, $\forall\, t \in \mathbb{R}$: $|t| \geq 0 \quad \rightarrow \quad |t| + 1 \geq 1$

$$\rightarrow \quad 0 < \frac{1}{|t|+1} \leq 1$$

$$\rightarrow \quad 0 \leq 1 - \frac{1}{|t|+1} < 1$$

$$\rightarrow \quad 0 \leq \frac{|t|}{1+|t|} < 1$$

$$\rightarrow \quad 0 \leq x < 1 \quad \rightarrow \quad x \in [0,1[$$

Ecuación cartesiana $\quad |y| = x^2, \; x \in [0,1[$

PROBLEMA 6

Hallar $\frac{d^3y}{dx^3}$ para: $\begin{cases} x = \sec\theta \\ y = \tan\theta \end{cases}$

Resolución:

- Primera Derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sec^2\theta}{sec\theta . tan\theta} \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = csc\theta$$

- Segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-csc\theta . ctg\theta}{sec\theta . tan\theta} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -ctg^3\theta$$

- Tercera derivada:

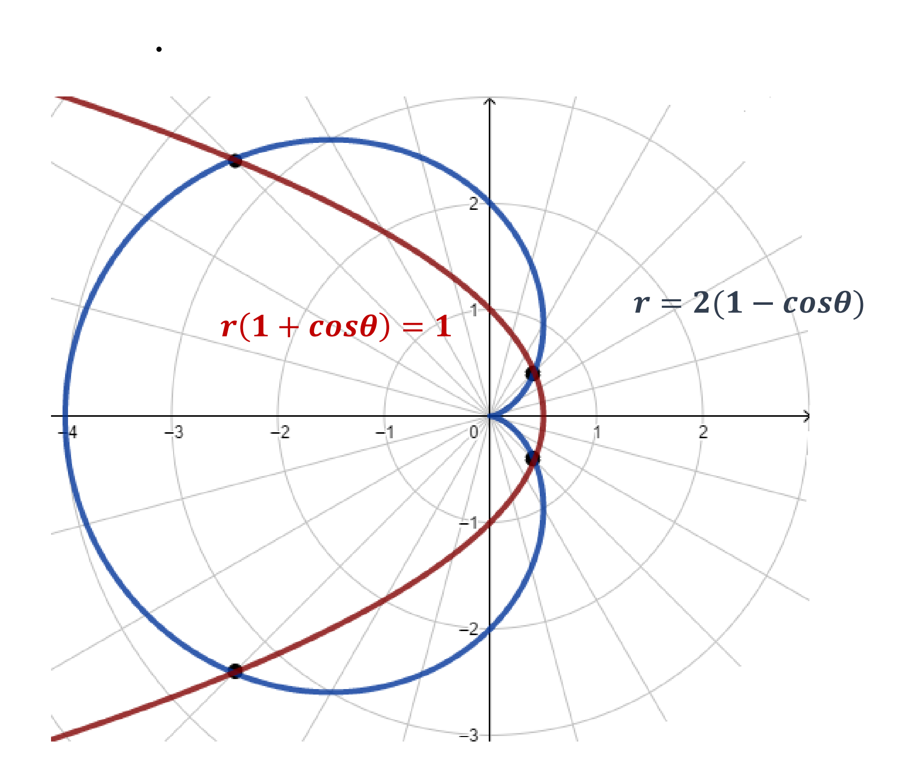
$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-3ctg^2\theta . (-csc^2\theta)}{sec\theta . tan\theta} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{d^3y}{dx^3} = 3ctg^4\theta . csc\theta}$$

PROBLEMA 7

Considerando las siguientes curvas polares: $r = 2(1 - \cos\theta)$ $\quad y \quad$ $r(1 + \cos\theta) = 1$

Calcule la distancia entre los dos puntos de intersección de las dos curvas, ubicados en el primer y segundo cuadrante

.



a) Hallar las coordenadas polares de todos los puntos de intersección. **2 pts.**

Reemplazando el r de la primera ecuación en la segunda, obtenemos:

$$2(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta) = 1 \quad \rightarrow \quad 2cos^2\theta - 1 = 0$$

$$\rightarrow \quad cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \vee \quad cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow \quad \theta \in \left\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$$

Por lo tanto, las coordenadas de los puntos de intersección son:

$$\boldsymbol{P_1}\left(2+\sqrt{2}\,;\,-\frac{3\pi}{4}\right)\quad \boldsymbol{P_2}\left(2-\sqrt{2}\,;\,-\frac{\pi}{4}\right)\quad \boldsymbol{P_3}\left(2-\sqrt{2}\,;\,\frac{\pi}{4}\right)\quad \boldsymbol{P_4}\left(2+\sqrt{2}\,;\,\frac{3\pi}{4}\right)$$

Rpta: $2\sqrt{3}$

PROBLEMA 8

Una planta de tratamiento de aguas negras descargó accidentalmente aguas negras no tratadas a un lago durante algunos días. Esto hizo que disminuyera temporalmente la cantidad de oxígeno disuelto en el lago. Sea $f(t)$ la cantidad de oxígeno en el agua (medido en unidades adecuadas) t días después de que las aguas negras empezaron a fluir en el lago.

$$f(t) = 1 - \frac{10}{t+10} + \frac{100}{(t+10)^2}$$

Halle la razón de cambio del oxígeno contenido en el lago en $t = 5$

Resolución

a) Razón de cambio instantáneo:

$$f'(t) = \frac{10}{(t+10)^2} - \frac{200}{(t+10)^3} \qquad \rightarrow \qquad f'(t) = \frac{10t-100}{(t+10)^3}$$

Razón de cambio del oxígeno contenido en el lago en $t = 5$ y en $t = 15$

A) $f'(5) = -\frac{50}{15^3} \approx -0{,}015\ \frac{u}{día}$

PROBLEMA 9

Hallar el radio de la base de un cono recto circular, de volumen mínimo, que circunscribe una esfera de radio r.

Resolución

Sea x: radio de la base del cono

y: distancia del vértice del cono al centro de la esfera

Entonces: y+R: altura del cono

Además: $\Delta ABC \sim \Delta ADE$

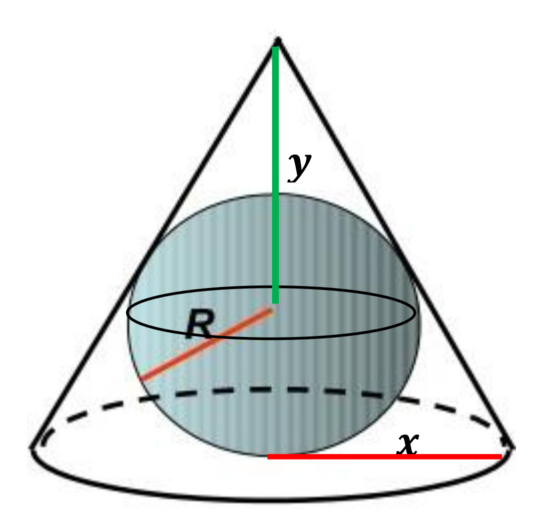
Por tanto: $\dfrac{x}{R} = \dfrac{y+R}{\sqrt{y^2-R^2}}$ ... (1)

En el cono: $V = \dfrac{1}{3}\pi x^2 (y+R)$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1): $V = \dfrac{\pi r^2 (y+R)^2}{3(y-r)}$ ... (3)

Derivando: $V'(y) = 0 \quad \rightarrow \quad y = 3R$

En (1): $x = R\sqrt{2}$ (radio del cono) …Rpta



PROBLEMA 10

Dada la función: $f(x) = (x^3 - 2)/(x-1)^2$, determine las coordenadas de la intersección de las asíntotas de f.

Resolución

a) Asíntota vertical: $x = 1$

Asíntota oblicua: $y = x + 2$

RPTA.(1;3)

PROBLEMA 11

Sea la curva paramétrica $C: \begin{cases} x = \frac{u}{u^2-1} \\ y = \frac{1}{u-1} \end{cases}$,obtenga $\frac{d^2y}{dx^2}$,en función del parámetro u.

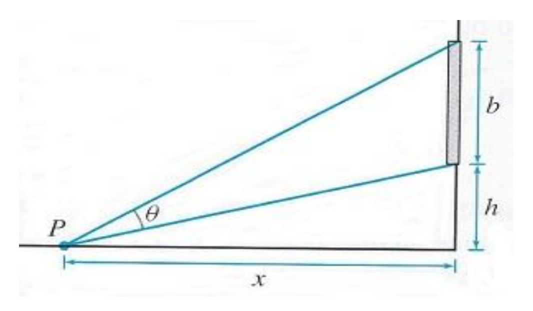
Resolución

$$Al\ derivar: \frac{dy}{du} = -\frac{1}{(u-1)^2} \quad y \quad \frac{dx}{du} = -\frac{u^2+1}{(u^2-1)^2} \quad entonces \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(u+1)^2}{u^2+1}$$

$$Luego: \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{du}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{du}} = \frac{\frac{d}{du}\left(\frac{(u+1)^2}{u^2+1}\right)}{-\frac{u^2+1}{(u^2-1)^2}} = 2\frac{(u^2-1)^3}{(u^2+1)^3} \quad \rightarrow$$

$$A) \quad \boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{(u^2-1)^3}{(u^2+1)^3}}$$

PROBLEMA 12



Se instala un rótulo publicitario a la altura b en la pared de un edificio con el borde inferior situado a una distancia h del suelo. ¿A qué distancia x de la pared debe situarse un observador para que el ángulo de observación θ sea máximo?

Resolución

De la información de la figura y considerando el ángulo $P = \theta + \alpha$ se obtiene:

$$tg(\theta + \alpha) = \frac{h+b}{x} \;\rightarrow\; \theta + \alpha = arctg\left(\frac{h+b}{x}\right) \quad \ldots \quad (1)$$

$$tg(\alpha) = \frac{h}{x} \quad \rightarrow \quad \alpha = arctg\left(\frac{h}{x}\right) \quad \ldots \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) se obtiene la *función objetivo*:

$$\theta(x) = arctg\left(\frac{h+b}{x}\right) - arctg\left(\frac{h}{x}\right) \quad sujeta\;\; a \quad x > 0$$

Derivando la función objetivo:

$$\theta'(x) = -\frac{\frac{b+h}{x^2}}{1+\left(\frac{b+h}{x}\right)^2} + \frac{\frac{h}{x^2}}{1+\left(\frac{h}{x}\right)^2} = -\frac{b+h}{x^2+(b+h)^2} + \frac{h}{x^2+h^2}$$

Criterio de optimización: $\theta'(x) = 0$

$$\frac{h}{x^2+h^2} = \frac{b+h}{x^2+(b+h)^2} \quad \rightarrow \quad x^2 = bh + h^2$$

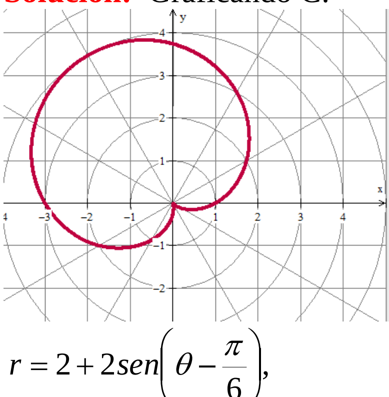
Para que el ángulo de observación sea máximo, el observador debe situarse a

$A)\quad x = \sqrt{bh+h^2}$ unidades lineales de la pared del edificio.

PROBLEMA 13

Sea la curva C definida por $r = 2 + 2sen\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right),$, obtenga la ecuación cartesiana de la recta tangente a la curva C en el punto de intersección de la curva C con el eje normal.

Solución: Graficando C:



$$r = 2 + 2sen\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right),$$

Punto de intersección:

$$en\ \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 2 + 2sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$r = 2 + \sqrt{3}$$

Punto de intersección: $y = 2 + \sqrt{3}; x = 0$

$$m_t = \frac{dy}{dx} = \frac{drsen\theta}{dr\cos\theta} = \frac{r\'sen\theta + r\cos\theta}{r\'\cos\theta - rsen\theta}$$

$$m_t = \frac{2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)sen\theta + \left[2 + 2sen\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\right]\cos\theta}{2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\cos\theta - \left[2 + 2sen\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\right]sen\theta}$$

$$En\ \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow m_t = \frac{1}{-\left[2 + \sqrt{3}\right]} = \frac{1}{-\left[2 + \sqrt{3}\right]}\frac{\left[2 - \sqrt{3}\right]}{\left[2 - \sqrt{3}\right]}$$

$$m_t = \sqrt{3} - 2$$

La recta tangente es:

$$y - (2 + \sqrt{3}) = (\sqrt{3} - 2)(x - 0)$$

$$\Rightarrow y = (\sqrt{3} - 2)x + 2 + \sqrt{3}$$

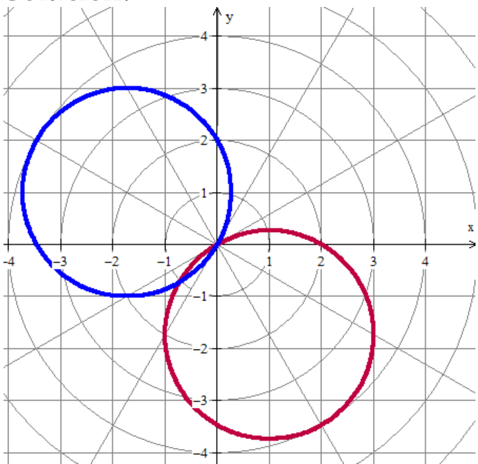
Rpta: $y = (\sqrt{3} - 2)x + 2 + \sqrt{3}$

PROBLEMA 14

Obtenga la ecuación polar de la recta que une los puntos de intersección de las curvas C1 y C2.

C1: $r = 4\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ y C2: $r = 4\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$

Solución:



Ptos. de intersección:

$$r = 4\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 4sen\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \ldots (1)$$

$$\Rightarrow sen\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$sen\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \theta - \frac{\pi}{3} + \theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Rpta: $\theta = \frac{\pi}{4}$

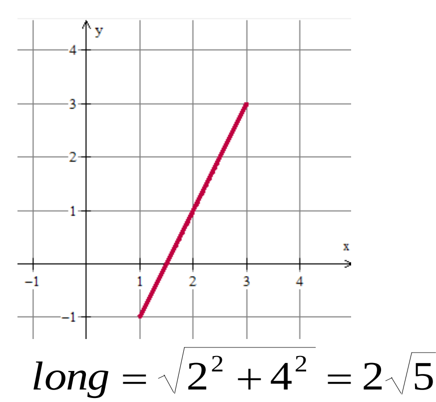
PROBLEMA 15

Obtenga la longitud del segmento de recta representada por las ecuaciones paramétricas:
$x = sen(t) + 2; \quad y = 2sen(t) + 1$

Solución:

$$sen(t) = x - 2 = \frac{y-1}{2} \Rightarrow y = 2x - 3$$

$$/ -1 \le sen(t) \le 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 \le x - 2 \le 1 \Rightarrow 1 \le x \le 3 \\ -1 \le \dfrac{y-1}{2} \le 1 \Rightarrow -1 \le y \le 3 \end{cases}$$



$$long = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

Rpta: $2\sqrt{5}$

PROBLEMA 16

$$\boldsymbol{Halle: \lim_{x\to 0} \frac{xArgtanh(x) + 4x^2}{(e^x - 1)^2}}$$

Solución

Aplicando L'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{xArgtghx + 4x^2}{(e^x - 1)^2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(xArgtghx)' + [4x^2]'}{[(e^x - 1)^2]'}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x)'(Argtghx) + (x)(Argtghx)' + 8x}{2(e^x - 1)e^x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{Argtghx + (x)\left(\frac{1}{1 - x^2}\right) + 8x}{2(e^x - 1)e^x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{Argtghx+\dfrac{x}{1-x^2}+8x}{2(e^{2x}-e^{x})}=\frac{0}{0}$$

Aplicando L'Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(Argtghx+\dfrac{x}{1-x^2}+8x\right)'}{[2(e^{2x}-e^{x})]'}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1-x^2}+\dfrac{1(1-x^2)-(x)(-2x)}{(1-x^2)^2}+8}{2[2e^{2x}-e^{x}]}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1-x^2}+\dfrac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2}+8}{2[2e^{2x}-e^{x}]}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1-x^2}{(1-x^2)^2}+\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+8\dfrac{(1-x^2)^2}{(1-x^2)^2}}{2[2e^{2x}-e^{x}]}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2+8(1-x^2)^2}{2[2e^{2x}-e^{x}](1-x^2)^2}=\frac{2+8}{2(2-1)(1)}=\frac{10}{2}=5$$

Rpta: 5

PROBLEMA 17

Para la curva C descrita por las ecuaciones paramétricas:

$$C:\begin{cases}x=t+5\\ y=(t+5)^4t\end{cases}$$

Encuentre para qué valor de t se encuentra el mínimo relativo

Solución

$$C:\begin{cases}x=t+5\\ y=(t+5)^4t\end{cases}$$

Calculando $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$$\frac{dx}{dt} = 1$$

$$\frac{dy}{dt} = (t+5)^4 + 4t(t+5)^3$$

$$\frac{dy}{dt} = (t+5)^3[t+5+4t]$$

$$\frac{dy}{dt} = (t+5)^3[5t+5] \rightarrow \frac{dy}{dt} = 5(t+5)^3[t+1]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{5(t+5)^3[t+1]}{1} \rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = 5(t+5)^3[t+1]}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$5(t+5)^3[t+1] = 0$$

$$t+5 = 0 \quad o \quad t+1 = 0$$

$$t = -5 \quad o \quad t = -1$$

$$\frac{dy}{dx} = 5(t+5)^3[t+1]$$

−



$En\ t = -1$ Existe un mínimo relativo de valor $y_{min} = -256$



PROBLEMA 18

La posición de una partícula móvil en el instante t está descrita por las ecuaciones

Paramétricas: $C: \begin{cases} x = 2t^2 \\ y = 4t + 2 \end{cases}$

Halle la rapidez y la aceleración tangencial en el instante $t = 1$

Solución

Calculando las componentes del vector velocidad

$v_x = 4t \ ; v_y = 4$

Calculando las componentes del vector aceleración

$a_x = 4 \ ; a_y = 0 \rightarrow |\bar{a}| = 4$

$$|\bar{v}| = \frac{ds}{dt} = rapidez = \sqrt{(4t)^2 + (4)^2}$$

$$Rapidez = \frac{ds}{dt} = \sqrt{16t^2 + 16} = \sqrt{16(t^2+1)} = 4\sqrt{t^2+1}$$

$a_T = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{4t}{\sqrt{t^2+1}}$

Evaluando para $t = 1$

$rapidez = 4\sqrt{(1)^2+1} = 4\sqrt{2} \rightarrow rapidez = 4\sqrt{2}$

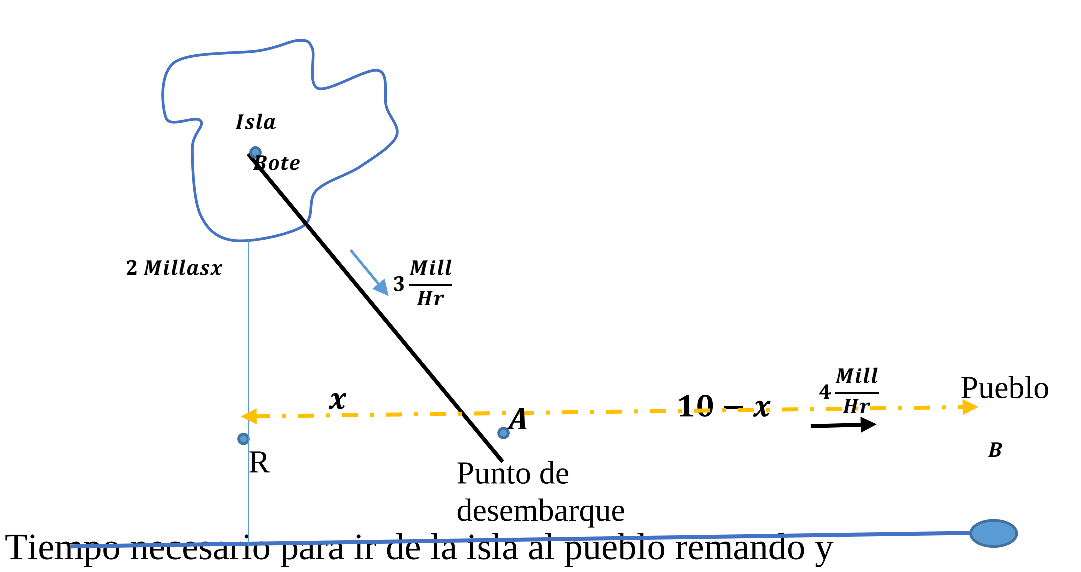
$aceleración\ tangencial = a_T = \frac{4(1)}{\sqrt{(1)^2+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \rightarrow$

$aceleración\ tangencial = 2\sqrt{2}$

Rpta: $Rapidez = 4\sqrt{2}$; $Aceleración\ tangencial = 2\sqrt{2}$

PROBLEMA 19

Una pequeña isla está a 2 millas, en línea recta del punto R de la ribera de un inmenso lago. Si un hombre que está en la isla puede remar en su bote a 3 millas por hora y caminar 4 millas por hora. ¿Dónde debe desembarcar para Llegar a un pueblo que está 10 millas playa abajo del punto R, en el menor tiempo?



Tiempo necesario para ir de la isla al pueblo remando y caminando

$10\ millas$

Tiempo utilizado= $t_{MA} + t_{AB} \rightarrow t = t_{MA} + t_{AB}$

$MA = \sqrt{4+x^2}$; $AB = 10 - x$

$t = \frac{\sqrt{4+x^2}}{3} + \frac{10-x}{4}$

Queremos minimizar el tiempo

$$\frac{dt}{dx}=\frac{x}{3\sqrt{4+x^2}}-\frac{1}{4}\rightarrow\frac{dt}{dx}=0$$
$$\frac{x}{3\sqrt{4+x^2}}-\frac{1}{4}=0\rightarrow\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}=\frac{3}{4}\rightarrow\frac{x^2}{4+x^2}=\frac{9}{16}$$
$$16x^2=9x^2+36\rightarrow 7x^2=36\rightarrow x^2=\frac{36}{7}$$
$$x=\pm\frac{6}{\sqrt{7}}$$
$x=\frac{6}{\sqrt{7}}$ **Millas de R**

$\frac{6}{\sqrt{7}}$ **Millas de R**

PROBLEMA 20

El agua está goteando del fondo del depósito semiesférico de 8pies De radio a razón de $2\frac{pies^3}{Hr}$**.El depósito estaba lleno en cierto momento, ¿con Qué rapidez baja el nivel del agua cuando la altura es $3pies$**?

Nota: El volumen de un casquete esférico de altura h (medido a partir del Orificio) de una esfera de radio r **es:** $V_{casquete}=\pi h^2(r-\frac{h}{3})$

$A)$ $\frac{dh}{dt}=-\frac{2}{39\pi}\frac{Pies}{Hora}$

B) $\frac{dh}{dt}=-\frac{2}{37\pi}\frac{Pies}{Hora}$

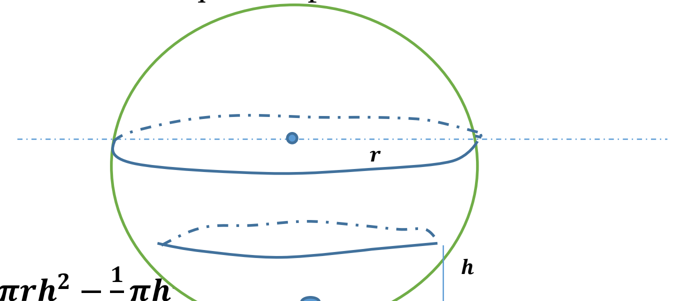
$C)$ $\frac{dh}{dt}=-\frac{1}{37\pi}\frac{Pies}{Hora}$

$D)$ $\frac{dh}{dt}=-\frac{1}{39\pi}\frac{Pies}{Hora}$

A) NINGUNO

Solución

Después de t **Horas** el nivel del líquido a partir del orificio es h pies



$$V_{casquete}=\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right)=\pi rh^2-\frac{1}{3}\pi h$$
$$\frac{dV_{casquete}}{dt}=\frac{d(\pi rh^2-\frac{1}{3}\pi h^3)}{dt}$$
$$\frac{dV_{casquete}}{dt}=[2\pi rh-\pi h^2]\frac{dh}{dt}$$
$se\ pide\ \frac{dh}{dt}$ **Cuando** $h=3\ pies, r=8;\frac{dV_{casquete}}{dt}=-2\frac{pies^3}{Hora}$

Reemplazando datos

$$\frac{dV_{casquete}}{dt}=[2\pi rh-\pi h^2]\frac{dh}{dt}\rightarrow -2=[2\pi(8)(3)-\pi(3)^2]\frac{dh}{dt}$$
$$-2=[48\pi-9\pi]\frac{dh}{dt}$$

$$-2 = 39\pi \frac{dh}{dt} \rightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{2}{39\pi}$$

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = -\frac{2}{39\pi}\frac{Pies}{Hora}}$$

A) $\frac{dh}{dt} = -\frac{2}{37\pi}\frac{Pies}{Hora}$